MATURA IZ MATEMATIKE V LUČI TEHNOLOGIJE
FINAL EXTERNAL EXAMINATION - MATURA IN THE VIEW OF TECHNOLOGY

Katarina Roškar
katarina.roskar@student.fmf.uni-lj.si
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Matija Lokar
matija.lokar@fmf.uni-lj.si
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Povzetek

Razvoj informacijske tehnologije in še posebej programov oziroma sistemov za simbolno računanje (SSR) ponuja nova orodja in neizogibno vpliva na metode in cilje matematičnega izobraževanja. SSR spreminjajo matematični svet in te spremembe je potrebno ustrezno vključiti tudi v matematični izobraževalni sistem. V zvezi s tem se poraja veliko pomembnih vprašanj. Eno ključnih je vpliv na preverjanje znanja. Trenutno so na maturitetnem pisnem izpitu iz matematike dovoljena le standardna (znanstvena) računala. V luči naraščajoče uporabe SSR si bomo pogledali izbrane maturitetne naloge in jih uvrstili v razrede petih različnih razvrstitev, ki merijo koristnost in vpliv sistemov za simbolno računanje na izpitna vprašanja. Predstavili bomo tudi sistem spletnih strani, zasnovan kot wiki, kjer se zbirajo pričujoče analize, ki bodo v pomoč pri uvajanju tehnologije v učni proces.

Ključne besede

Matura, tehnologija, preverjanje znanja, sistemi za simbolno računanje, SSR

Abstract

The development of information technology and, especially, programs or computer algebra systems (CAS) offers new tools and inevitably influences the methods and goals of mathematical teaching and learning. CAS are reshaping the mathematical landscape and the mathematical education system should reflect these changes. Many questions arise concerning this fact. One of the key questions is the influence on assessment. At the moment only standard (scientific) calculators are allowed during the Matura examination. In the view of emerging usage of CAS, we will take a look at couple of exam questions and classify them according to five different schemes which measure the usefulness and the impact of computer algebra systems on exam questions. We shall also present the wiki based pages, where analyses as this one accumulate and shall serve as a helpful tool in introducing technology into the teaching process.

Keywords

Matura, external examination, technology, assessment, Computer Algebra Systems, CAS

1 O maturi

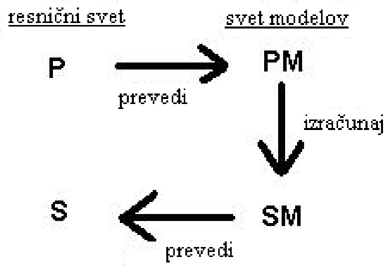
Leta 2003 je *Zakon o maturi* dosedanjo enotno *maturo* poimenoval *splošno maturo* in dodal *poklicno maturo* (prej *zaključni izpit* na tehniških šolah). V tem članku bomo govorili o pisnem delu splošne mature. Z uspešno opravljeno splošno maturo pridobi kandidat srednjo izobrazbo in tako možnost vpisa v univerzitetni ali strokovni študij.

Matematika je obvezen predmet pri splošni maturi. Pri maturitetnih nalogah se preverja predvsem operativno znanje srednješolske matematike. Pogosto prinašajo točke že pravilni postopki reševanja [Alt et al., 2003]. Kandidati lahko izbirajo med osnovno in višjo ravnijo, pri čemer so naloge na zahtevnejši ravni strukturirane in sestavljene iz večih delov.

Letno splošno maturo opravi preko 9000 dijakov. Število maturantov se v primerjavi s prejšnjimi obdobji povečuje. Spreminja se tudi predmetni izpitni katalog iz matematike, ki določa *izpitne cilje*, kot so: sposobnost branja matematičnega besedila in korektne interpretacije, sposobnost logične, jasne in natančne predstavitve matematične vsebine v raznih oblikah z uporabo ustrezne simbolike in terminologije, sposobnost računanja s števili in zapisa rezultata z določeno natančnostjo ter presoja veljavnosti rezultata, sposobnost izbire in uporabe primerne metode, sposobnost uporabe računala ter osnovnih matematičnih orodij za načrtovanje, sposobnost interpretacije, preoblikovanja in pravilne uporabe matematičnih trditev, sposobnost logičnega sklepanja iz danih matematičnih podatkov, sposobnost prepoznavanja matematičnih vzorcev in struktur, sposobnost videti in izkoristiti soodvisnost različnih vej (področij) matematike, sposobnost kombinacije več matematičnih veščin in tehnik pri reševanju problemov, sposobnost uporabe matematike v življenjskih situacijah [Alt et al., 2007].

Od vseh teh ciljev matematičnega izobraževanja še vedno najbolj izstopa tradicionalno urjenje sposobnosti izvedbe matematičnih operacij [Kokol-Voljč, 2000a]. Razlog za to tiči v zgodovini matematike. Kot piše Heugl v [Heugl, 2000], je bila gonilna sila razvoja matematike potreba po razvoju algoritmov in metod, ki bi poenostavile dolge račune, z drugimi besedami, potreba po avtomatizaciji nepotrebnih matematičnih aktivnosti oziroma "trivializaciji". Ključno vlogo pri tem imajo orodja.

Razvoj informacijske tehnologije in še posebej programov oziroma sistemov za simbolno računanje (SSR) ponuja nova orodja in neizogibno vpliva na metode in cilje matematičnega izobraževanja. SSR, ki jih pogosto tudi v slovenski literaturi označujemo kar z angleško kratico CAS, ponujajo vnaprej pripravljena orodja, s pomočjo katerih lahko dosežemo pomembnejše cilje, namreč razumevanje in uporabo matematičnih pojmov, ki sta bila do sedaj bolj v ozadju [Kokol-Voljč, 2000b].



Slika 1: Značilni koraki pri reševanju matematičnega problema. P: matematični problem v resničnem svetu, PM: matematični problem v svetu modelov, SM: rešitev matematičnega problema v svetu modelov, S: rešitev matematičnega problema v resničnem svetu. Šolski sistem posveča 80% časa računanju in le 20% časa modeliranju in prevajanju problema v matematični svet ter nazaj.[Kutzler, 2000]

SSR spreminjajo matematični svet in te spremembe je potrebno ustrezno vključiti tudi v izobraževalni sistem. V zvezi s tem se poraja veliko pomembnih vprašanj ([Lokar, 2000], [Lokar, 2005]). Eno ključnih je vpliv na preverjanje znanja.

2 Preverjanje znanja in SSR

Trenutno so na maturitetnem pisnem izpitu iz matematike dovoljena le standardna (znanstvena) računala. Računala z možnostjo risanja grafov funkcij in simbolnega računanja ter

SSR niso dovoljeni. V nekaterih državah je uporaba grafičnih in algebrskih računal ter celo SSR dovoljena ali pričakovana [Böhm et al., 2004], vsaj na določenem delu izpita. Določeni raziskovalci področja preverjanja znanja menijo, da bi problem uvajanja tehnologije, s katero pride pomembnost uravnovešanja urjenja in razumevanja (slika 1) še bolj do izraza, rešili s t.i. *dvodelnimi* izpiti [Herget et al., 2000]. Ti so sestavljeni iz dveh delov: dela, kjer je dovoljena uporaba tehnoloških pripomočkov in dela, kjer ta ni dovoljena. Tak sistem izpitov se je že uveljavil v Veliki Britaniji. Z razdelitvijo izpita na dva dela dosežemo, da lahko preverjamo tudi znanje temeljnih veščin računanja. Če namreč dovolimo uporabo SSR, cilj takih nalog ni več izpolnjen in se razvrednotijo, saj so trivialno rešljive. Da ne bi preverjali le sposobnosti uporabe SSR, take naloge zastavljamo na posebnem delu izpita, kjer ni dovoljen noben tehnološki pripomoček (niti najbolj preprosto štirifunkcijsko računalo ne). Spet drugi se s tem ne strinjajo in menijo, da gre le za zamegljevanje položaja [Wazir, 2007] in da naj bo tehnologija nasploh dovoljena ali pa ne.

Pri odločanju o tem, kateri pristop je najboljši, nam lahko pomaga pregled obstoječih izpitov z gledišča njihovih vrednosti v okolju, ki podpira SSR in tudi druge tehnološke pripomočke. Predmet tega članka je taka analiza izbranih maturitetnih nalog. Pri analizi si bomo pomagali z razvrstitvami, ki določajo nivo vpliva sistemov za simbolno računanje ter s tremi sistemi za simbolno in numerično računanje: `Mathematica`, `Derive` in `Matlab`. Slednjega, ki dejansko ne spada med SSR (vsaj v osnovni obliki ne), smo namenoma uvrstili v prispevek, saj je njegova uporaba pri študiju na Fakulteti za matematiko zelo razširjena. Podobna analiza je bila narejena leta 2000 z uporabo programa `Derive` ([Lokar in Lokar, 2000], [Lokar in Lokar, 2001]).

Danes obstaja širok izbor sistemov za simbolno računanje, pa tudi drugih bolj in manj razširjenih orodij, ki jih lahko uporabimo kot pripomoček pri reševanju matematičnih problemov. Namenoma smo si za našo analizo izbrali omenjeni tri. Pri pouku matematike v srednjih šolah in gimnazijah v Sloveniji je predvsem razširjena uporaba programa `Derive`. Njegova uporaba je preprosta in ponuja možnost povezovanja z zmogljivejšimi računali znamke `TI`. Le-ti se poleg programov `Derive`, `Magma`, `Mathematica`, `Matlab` in nekaterih drugih uporabljajo pri študijskih programih Fakultete za matematiko in fiziko.

2.1 Razvrstitve matematičnih problemov glede na njihovo vrednost v okolju, ki podpira SSR

V literaturi [Jones in McCrae, 1996], [Kokol-Voljč, 2000a], [Herget et al., 2000], [Aogáin, 2000], najdemo več načinov razvrstitve, ki poskušajo matematične probleme, oziroma bolje rečeno zastavljene matematične naloge, razvrstiti v skupine glede na to, kaj dovoljena uporaba SSR pomeni za njihovo reševanje. Na kratko bomo predstavili obstoječe razvrstitve in uvedli kratice za posamezne razrede. S pomočjo teh razredov bomo naredili analizo izbranih maturitetnih nalog.

Razvrstitev P. Jones in B. McCrae (1996) razvršča matematične naloge na podlagi vpliva SSR:

JM¬ Ni vpliva Uporaba SSR ne vpliva na način reševanja matematičnega problema. Uporaba bodisi nič ne prispeva k reševanju, ali pa le toliko, kolikor bi tudi sicer dovoljeno orodje (znanstveno računalo).

JM✓ Vpliv Uporaba SSR vpliva na samo reševanje matematičnega problema. A ta vpliv je tak, da problem lahko ostane nespremenjen. SSR nudi le matematično veljavno alternativno metodo.

JM! Trivializacija Uporaba SSR vpliva na vrednost matematičnega problema toliko, da bi ga bilo potrebno preoblikovati. SSR za zastavljeni problem nudi metodo, ki zahteva le tehnično znanje uporabe SSR in malo ali nič matematičnega razmisleka.

B. Kutzlerjeva razvrstitev (1998) razvršča matematične naloge na podlagi dveh kriterijev. Prvi je vloga SSR pri procesu reševanja matematičnega problema (*primarna* proti *sekundarni*). Drugi kriterij pomeni potrebno predznanje uporabe SSR pri reševanju (*rutinsko* proti *napredno*):

KUI Primarna rutinska uporaba SSR Uporaba SSR je najvažnejša dejavnost pri reševanju matematičnega problema, ker bi ga sicer le stežka rešili (ali pa sploh ne). Za uporabo SSR zadostuje osnovno znanje.

KUI$*$ Primarna napredna uporaba SSR Uporaba SSR je najvažnejša dejavnost pri reševanju matematičnega problema, ki bi ga sicer le stežka rešili (ali pa sploh ne). Za uporabo SSR je potrebno napredno znanje.

KUII Sekundarna rutinska uporaba SSR Uporaba SSR igra le manjšo vlogo pri reševanju matematičnega problema, ker ima poudarek na sposobnostih, ki jih SSR nima. Za uporabo SSR zadostuje osnovno znanje.

KUII$*$ Sekundarna napredna uporaba SSR Uporaba SSR igra le manjšo vlogo pri reševanju matematičnega problema, ker ima poudarek na sposobnostih, ki jih SSR nima. Za uporabo SSR je potrebno napredno znanje.

KU$\emptyset$ Nesmiselna (nepomembna) uporaba SSR Pri reševanju matematičnega problema nam SSR nič ne koristi.

Razvrstitev po V. Kokol-Voljč (2000) razvršča naloge na podlagi vloge/pomena matematičnega problema pri preverjanju sposobnosti (v smislu razumevanja matematičnih pojmov) ter veščin (v smislu spretnosti pri izvajanju računov):

KO$\neg$ Za SSR neobčutljiv problem Problem je tak, da je za rešitev ključno razumevanje matematičnih pojmov, na katerih problem temelji. Uporaba SSR nudi omejeno pomoč pri reševanju problema.

KO? Za SSR občutljiv problem Problem je tak, da je brez SSR reševanje problema naporno, ker vsebuje veliko rutinskih izračunov ali pa ker zahteva večstopenjske strategije reševanja. Uporaba SSR pri reševanju lahko spremeni pomen problema. Pri tem pride do spremembe postopka iz mehanskega dela k semantičnem in pojmovnem ter aplikacijskem delu. Vendar pa lahko uporaba SSR tudi izrazito razvrednoti vlogo preverjanja določenih sposobnosti. Pridobljena količina informacije o znanju je lahko zelo skopa. Pri takem problemu je ključno najti oziroma postaviti pravo ravnovesje med količino rutinskega dela ter razumevanja, ki sta potrebna za rešitev.

KO! S SSR razvrednoten problem Problem zahteva le uporabo znanja o računskih postopkih. Z uporabo SSR se smiselnost zastavljanja takega problema popolnoma izgubi; od problema ostane le preverjanje tehnične sposobnosti uporabe SSR.

KO✓ Problem, ki preverja sposobnosti in veščine Problem je tak, da večino reševanja zavzema prevod izrazov iz ene oblike v drugo z uporabo različnih matematičnih pravil. Za rešitev problema je potrebna veščina uporabe transformacij v matematični svet, pri čemer je potrebno tudi znanje o sintaksah matematičnih izrazov. Z uporabo SSR s problemom preverjamo znanje izbire in uporabe transformacij, saj brez tega uporaba SSR ni mogoča.

K0⋆ **Redek problem** Problem ni običajen in ga lahko rešimo na več enakovrednih načinov. Rešimo ga lahko le z uporabo izvirnih metod; zahteva ustvarjalnost, pri čemer SSR služi le kot orodje.

E. Mac Aogáin (2000) razvršča naloge na podlagi stopnje zahtevnosti matematičnega problema, če ga rešujemo z SSR:

M0 **Trivialni problem** Problem zahteva le nekaj preprostih korakov. Z uporabo SSR postane trivialen.

M1 **Enostaven problem** Problem je zahtevnejši. Z uporabo SSR se znatno zmanjša težavnost, vendar pa pri reševanju še vedno potrebujemo nekaj znanja o temeljnih matematičnih pojmih.

M2 **Težek problem** Problem je zahteven. Z uporabo SSR se večina težavnosti ohrani. SSR nudi le rahlo pomoč pri reševanju.

M¬ **Za SSR neobčutljiv problem** Problem je tak, da uporaba SSR le neznatno ali pa sploh ne pripomore k rešitvi.

Razvrstitev W. Herget, H. Heugl, B. Kutzler, E. Lehmann (2000) razvršča probleme na podlagi tega, ali naj bi pri reševanju matematičnega problema dovolili uporabo tehnologije (SSR) ali ne:

-T **Brez tehnologije** Problem je enostavno rešljiv brez uporabe tehnoloških pripomočkov. Reševanje zahteva uporabo temeljnih veščin matematike. Z uporabo SSR bi od problema ostalo le preverjanje tehnične sposobnosti uporabe SSR, zato naj se tak problem reši brez uporabe kakršnih koli računskih pripomočkov.

+T **S tehnologijo** Problem je težje rešljiv brez uporabe tehnoloških pripomočkov. Za rešitev zahteva bodisi naprednejše znanje, ki je zgrajeno na osnovah problemov iz razreda zgoraj, bodisi večkratno/rutinsko uporabo osnovnega znanja. Uporaba SSR naj bo dovoljena.

?T **Vprašljivo** Problem je tak, da ga je težko uvrstiti v eno izmed gornjih dveh razredov.

Poudarimo naj, da imajo našteti načini razvrstitve vsak svoje prednosti in slabosti. Dejansko so pogosto pregrobi, saj so matematični problemi po naravi glede vpliva SSR zvezno porazdeljeni. Zato je pri uvrstitvi v določen razred potrebno natančno obrazložiti razlog take odločitve. Za boljšo predstavo relacij med posameznimi načini razvrstitve navedimo naslednjo tabelo (povzeta iz virov [Kokol-Voljč, 2000a], [Flynn in McCrae, 2001], [Herget et al., 2000]). Glede na to, da je Kutzlerjeva razvrstitev dvodimenzionalna, smo jo vzeli za osnovo in ostale razvrstitve primerjali z njo. Primerjave so, zaradi že omenjenih umetno postavljenih mej med razredi razvrstitev, le okvirne.

		Kutzler				
		KUI	**KUI∗**	**KUII**	**KUII∗**	**K∅**
Kokol-Voljč	**KO**	✓ ? !	? !	? ⋆	? ⋆	⋆ ¬
Jones & MacCrae	**JM**	!	!	✓	✓	¬
Mac Aogáin	**M**	0 1	0 1	1 2	1 2	¬
Herget et al.	**T**	+	+	+ ? -	+ ? -	-

3 Izbrane naloge maturitetnega pisnega izpita iz matematike

Pogledali si bomo tri naloge iz poskusne mature iz leta 1997 (obširnejša analiza in bistveno več primerov rešitev je vsebovanih v [Roškar, 2007]). Za vsako nalogo posebej bomo navedli:

- izvirno/prvotno besedilo naloge;
- opis namena naloge: temelji na predlaganem točkovniku, določenem za ta maturitetni izpit, zato se lahko nekoliko razlikuje od prvotnega namena naloge kot so si ga zastavili sestavljalci naloge;
- rešitve naloge s pomočjo programov `Mathematica 4.0`, `Derive 6.10` in `Matlab 6.5`, pri čemer smo poskušali uporabiti le osnove prijeme v programih;
- razvrstitev naloge v razrede in obrazložitev po potrebi;
- vrednost naloge z uporabo SSR, če upoštevamo njen namen in razvrstitev ter
- s tem povezane predloge za spremembo naloge, če bi dovolili uporabo sistemov za simbolno računanje.

Izbira nalog je bila več ali manj naključna in nikakor ne pomeni nekega splošno veljavnega vzorca. Pripomnimo še, da bi bilo pri natančnejši analizi, poleg ločene obravnave nalog, potrebno izpit obravnavati tudi kot celoto.

3.1

Izraz $\frac{36^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^2}{0{,}25^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{81} \cdot 4^{-2}}$ *poenostavite do oblike* $\sqrt[n]{m}$, *$(n, m \in \mathbb{N})$.*

Namen naloge: Preveriti, ali kandidat zna računati s potencami in koreni, ali zna izračunati vrednost izraza, ki vsebuje racionalne eksponente, ali zna končno decimalno število zapisati kot okrajšan ulomek ter, ali zna racionalni eksponent zapisati v obliki korena in obratno.

Rešitve s programi `Mathematica`, `Derive` in `Matlab`: Pri vnosu moramo vedeti, kako se uporabljajo eksponenti. Potrebno je tudi poznavanje strukture izraza.

Slika 2: Rešitve naloge 3.1.

```
              - 1/3  2
            36     ·3
#1:   ─────────────────────
           - 3/2   1/3  -2
      0.25      ·81   ·4

                            1/3
#2:                        2
```

(a) Rešitev naloge v programu `Derive`. Pri vnosu moramo $\sqrt[3]{81}$ pretvoriti v $81^{1/3}$ in nato racionalni eksponent 1/3 v rezultatu še sami pretvoriti v $\sqrt[3]{}$.

```
>> (36^(-1/3)*3^2)/(0.25^(-3/2)*81^(1/3)*4^(-2))

ans =

    1.2599

>> sym(ans^3)

ans =

2
```

(b) Rešitev naloge v programu `Matlab`. Kot pri (a), le da nam preostane tudi ugibanje racionalnega eksponenta in uporaba funkcije `sym` za simbolični zapis rezultata.

$$\frac{36^{-\frac{1}{3}} * 3^2}{\texttt{Rationalize[0.25]}^{-\frac{3}{2}} * \sqrt[3]{81} * 4^{-2}} \ \texttt{//TraditionalForm}$$

$$\sqrt[3]{2}$$

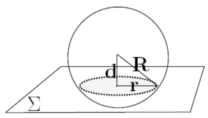
(c) Rešitev naloge v programu `Mathematica`. Če želimo, da z ukazom `TraditionalForm` dobimo rešitev v željeni obliki, moramo pri vnosu izraza najprej racionalizirati število 0, 25.

Uvrstitev: KUI/KUII, KO!/KO?, JM!/JM✓, M0/M1, -T/+T.
Vrednost naloge z uporabo SSR: V programu `Mathematica` je naloga skoraj trivialna, saj je potrebno le poznavanje prioritete računskih operacij in strukture izraza. Pri drugih dveh programih moramo uporabiti tudi znanje o racionalnih eksponentih in korenih. Reševanje naloge v programu `Matlab` se ne razlikuje od uporabe navadnega računala, ki pa je dovoljeni pripomoček pri maturi.
Predlogi za spremembe ob uporabi SSR: Ob uporabi programov `Derive` in `Matlab` skoraj ni potrebnih sprememb. Morda bi bil izraz lahko še bolj zapleten. Če pa bi dovolili uporabo programa `Mathematica`, bi morali nalogo zastaviti povsem drugače, da bi bil izpolnjen njen namen.

3.2

Prostornina krogle meri $36\pi\, dm^3$. Presek te krogle z ravnino Σ ima ploščino $5\pi\, dm^2$. Izračunajte razdaljo med središčem krogle in ravnino Σ.

Namen naloge: Preveriti, ali kandidat zna izbrati in uporabiti primerno metodo za rešitev naloge, ali pozna izraz za prostornino krogle in ploščino kroga, ali pozna Pitagorov izrek ter, ali ima razvito predstavo o geometrijskih objektih krogla in ravnina.
Rešitve s programi `Mathematica`, `Derive` in `Matlab`:
Za lažjo predstavo je dobro, da si narišemo skico. Ta nam nakaže pot do rešitve. Potrebno je poznavanje formul za prostornino krogle in ploščino kroga ter Pitagorovega izreka. Pri vsem tem nam uporaba programov ne pomaga prav nič.



Slika 3: Rešitve naloge 3.2.

```
<< Miscellaneous`Units`
Clear [V, P, R, r, d]
```

$$\texttt{Solve}\left[\left\{V == 36\,\pi\,(\texttt{Deci Meter})^3,\ P == 5\,\pi\,(\texttt{Deci Meter})^2,\ V == \frac{4\,\pi\,R^3}{3},\ P == \pi\,r^2,\ d^2 == R^2 - r^2\right\},\ d,\ \{r, R\}\right]$$

$$\left\{\{d \to -2\,\texttt{Deci Meter}\},\ \{d \to 2\,\texttt{Deci Meter}\},\right.$$
$$\left\{d \to -\sqrt{-\frac{19}{2}\,\texttt{Deci}^2\,\texttt{Meter}^2 - \frac{9}{2}\,i\sqrt{3}\,\texttt{Deci}^2\,\texttt{Meter}^2}\right\},\ \left\{d \to \sqrt{-\frac{19}{2}\,\texttt{Deci}^2\,\texttt{Meter}^2 - \frac{9}{2}\,i\sqrt{3}\,\texttt{Deci}^2\,\texttt{Meter}^2}\right\},$$
$$\left.\left\{d \to -\sqrt{-\frac{19}{2}\,\texttt{Deci}^2\,\texttt{Meter}^2 + \frac{9}{2}\,i\sqrt{3}\,\texttt{Deci}^2\,\texttt{Meter}^2}\right\},\ \left\{d \to \sqrt{-\frac{19}{2}\,\texttt{Deci}^2\,\texttt{Meter}^2 + \frac{9}{2}\,i\sqrt{3}\,\texttt{Deci}^2\,\texttt{Meter}^2}\right\}\right\}$$

(a) Rešitev naloge v programu `Mathematica`.

#1: CaseMode := Sensitive

#2: $\texttt{SOLVE}\left(\left[V = 36\cdot\pi,\ P = 5\cdot\pi,\ V = \frac{4\cdot\pi\cdot R^3}{3},\ P = \pi\cdot r^2,\ d^2 = R^2 - r^2\right],\ d\right)$

#3: $[d = 2 \wedge P = 5\cdot\pi \wedge R = 3 \wedge V = 36\cdot\pi \wedge r = \sqrt{5},\ d = 2 \wedge P = 5\cdot\pi \wedge R = 3 \wedge V = 36\cdot\pi \wedge r = -\sqrt{5},$
$d = -2 \wedge P = 5\cdot\pi \wedge R = 3 \wedge V = 36\cdot\pi \wedge r = \sqrt{5},\ d = -2 \wedge P = 5\cdot\pi \wedge R = 3 \wedge V = 36\cdot\pi \wedge r = -\sqrt{5}]$

(b) Rešitev naloge v programu `Derive`. Če poskusimo "uporabiti enote" pri velikosti prostornine in preseka (po uvedbi z ukazom `dm:=` na začetku), ne dobimo eksplicitne rešitve.

(c) Rešitev naloge v programu `Matlab`. Če poskusimo "uporabiti enote" pri velikosti prostornine in preseka (po uvedbi z ukazom `syms dm` na začetku), ne dobimo *nobene* rešitve.

```
>> clear V P R r d
>> syms V P R r d
>> s=solve('V=36*pi','P=5*pi','V=4*pi*R^3/3',...
'P=pi*r^2','d^2=R^2-r^2')

s =

    P: [12x1 sym]
    R: [12x1 sym]
    V: [12x1 sym]
    d: [12x1 sym]
    r: [12x1 sym]

>> s.d
```

```
ans =

[  1/2*(-38-18*i*3^(1/2))^(1/2)]
[ -1/2*(-38-18*i*3^(1/2))^(1/2)]
[  1/2*(-38-18*i*3^(1/2))^(1/2)]
[ -1/2*(-38-18*i*3^(1/2))^(1/2)]
[  1/2*(-38+18*i*3^(1/2))^(1/2)]
[ -1/2*(-38+18*i*3^(1/2))^(1/2)]
[  1/2*(-38+18*i*3^(1/2))^(1/2)]
[ -1/2*(-38+18*i*3^(1/2))^(1/2)]
[                             2]
[                             2]
[                            -2]
[                            -2]
```

Uvrstitev: KUII, KO?, JM✓, M1, +T.
Vrednost naloge z uporabo SSR: Da rešimo zastavljeni problem, moramo poznati potrebne pojme in izraze ter znati interpretirati rezultate (izmed vseh izbrati smiselnega) in uporabljati merske enote. Če z nalogo želimo preveriti, ali se kandidat zna lotiti problema, je SSR le koristen pripomoček.
Predlogi za spremembe ob uporabi SSR: Spremembe niso potrebne, če seveda ne preverjamo znanja reševanja (enostavnega) sistema enačb.

3.3

Janez je s svojimi petimi prijatelji odigral teniški turnir. Vsak je igral z vsakim natanko enkrat. Janez je izgubil le dve igri. (Neodločenih rezultatov pri tenisu ni.) Kolikšna je verjetnost, da izmed zapisnikov vseh iger na slepo izberemo zapisnik igre, v kateri je Janez zmagal?

Namen naloge: Preveriti, ali kandidat sposoben prepoznati matematične strukture, ali zna izračunati verjetnost danega dogodka, ali pozna definicijo verjetnosti ter, ali pozna pojem kombinacij.
Rešitve s programi `Mathematica`, `Derive` in `Matlab`:

```
igerJ = 5;
zgubJ = 2;
zmagJ = igerJ - zgubJ;
igralcev = 6;
iger = Binomial[igralcev, 2];
P = zmagJ/iger
```

$\frac{1}{5}$

(a) Rešitev naloge v programu `Mathematica`.

```
>> igerJ = 5;
>> zgubJ = 2;
>> zmagJ = igerJ-zgubJ;
>> igralcev = 6;
>> iger = nchoosek(igralcev,2);
>> P=sym((igerJ-zgubJ)/iger)

P =

1/5
```

(b) Rešitev naloge v programu `Matlab`.

```
#1:  igerJ := 5
#2:  zgubJ := 2
#3:  zmagJ := igerJ - zgubJ
#4:  igralcev := 6
#5:  iger := COMB(igralcev, 2)
#6:  P := (igerJ - zgubJ)/iger
#7:  P := 1/5
```

(c) Rešitev naloge v programu `Derive`.

Slika 4: Rešitve naloge 3.3.

Uvrstitev: KUII, KO¬, JM¬, M¬, -T.
Vrednost naloge z uporabo SSR: Da rešimo zastavljeni problem, moramo imeti vso potrebno matematično znanje. SSR prispeva k reševanju le toliko, kolikor bi tudi sicer dovoljeno računalo.
Predlogi za spremembe ob uporabi SSR: Spremembe niso potrebne.

4 Wiki

Kot smo že rekli, lahko analize "tehnoloških" rešitev obstoječih maturitetnih pisnih izpitov pomagajo razjasniti, kateri pristop bi bil najustreznejši pri uvajanju sistemov za simbolno računanje. Zato bi bilo koristno, da bili izsledki takih raziskav javno dostopni. Prav tako bi bilo smiselno zgraditi čimbolj obširno bazo nalog, pa tudi pri posameznih nalogah primerjati uporabo številnih tehnoloških pripomočkov. To pa je vsekakor obseg dela, ki presega zmožnosti posameznika ali manjše skupine. Tovrstne analize so namreč smiselne le, če pokrivajo kar se da široko območje dosedanjega načina preverjanja znanja.

Pogled na reševanje, namen, ozadje nalog ter še posebej kategorizacija nalog glede na njihovo vrednost je prav tako lahko stvar diskusije. Želeno bi bilo zbrati različne poglede na to. Potrebujemo torej način, kako bi omogočili kar se da enostavno sodelovanje vsem, ki jih tovrstna tematika zanima. Z današnjo tehnologijo se ponuja rešitev v spletnem sistemu *wiki* (na katerem je osnovana tudi znana prosta internetna enciklopedija *Wikipedija*). Spletne strani, zasnovane kot *wiki*, omogočajo tako imenovano sodelovalno urejanje spletnih strani, kjer posamezen uporabnik ne potrebuje drugega, kot brskalnik in že jih lahko ureja. Zamisel in postavitev spletnega sistema za zbiranje maturitetnih izpitov je natančneje predstavljena v [Roškar, 2007], kjer lahko najdemo tudi posnetke primerov. Tu naj omenimo le bistvene ideje.

Naš wiki, ki trenutno še nima imena, je zasnovan tako, da je v osnovi vsaka maturitetna naloga *članek*. Predstavljena je z besedilom, "matematično" rešitvijo in rešitvami s pomočjo sistemov za simbolno računanje. Hkrati pa lahko o nalogi izvemo tudi še podatke kot so: letnik in mesec izpitnega roka, raven zahtevnosti, v kateri sklop srednješolske matematike spada naloga (po predmetnem izpitnem katalogu, kot je razdeljeno v [Alt et al., 2003]) ter uvrstitev v posamezne razvrstitvene razrede in analiza vpliva SSR. Vsako tako stran ob nastanku uvrstimo v ustrezne *kategorije* (oziroma *podkategorije...*) in tako samodejno gradimo pregledno bazo podatkov. V bazi potem lahko najdemo članek s pomočjo sistema kategorij in njenih nadaljnjih podkategorij, ki se dopolnjuje, vsakič, ko objavimo novo stran. Tako bo enostavno delati tudi različne analize, kot je npr. v kateri razvrstitveni razred spada največ obravnavanih nalog in podobno.

Predvidevamo tudi, da bodo sodelujoči uporabljali tudi druga orodja (npr. simbolni računali `HP48G` ali pa `TI-92`, programe za risanje grafov (`AutoPlot`, ...)). Zasnova spletišča je taka, da bo vključitev novih orodij (opisov rešitev z novimi orodji) kar se da enostavna.

Seveda načrtujemo, da bodo v tem wikiju predstavljeni tudi vsi omenjeni sistemi za razvrščanje ter ostala gradiva, pomembna za to področje.

5 Zaključek

Potrebno se bo soočiti z novimi orodji. Pripravljeni moramo biti na to, da bodo določena "rutinska" dela prevzeli sistemi za simbolno računanje in drugi tehnološki pripomočki. Z analizo izbranih maturitetnih nalog lahko raziščemo in pokažemo pomembnost natančne določitve namena posamezne naloge. Ta je toliko bolj važna, če imamo na razpolago orodja, kot so SSR. Da bo imela analiza določeno "težo", je smiselno, da analiziramo kar se da bogat spekter obstoječih nalog in pri tem uporabimo različna orodja in različne pristope. Pri tem nam je lahko v veliko pomoč sistem, zasnovan kot strani wiki, katerega zametek smo nakazali.

Literatura

[Alt et al., 2003] Alt, Z.; Benko, D.; Drnovšek, I.; Erker, J.; Fric, M.; Hvastja, D.; Jevnikar, M.; Kejžar, B.; Kobal, D.; Kranjc, B.; Lavrič, B.; Legiša, P.; Mohar, B.; Pagon, D.; Pavletič, M.; Pavlič, G.; Pisanski, T.; Robnik, A.; Škof, M.; Urbanija, F. V.; in Žerovnik, J. (2003). *MATEMATIKA Zbirka maturitetnih nalog z rešitvami 1995-2002.* Državni izpitni center.

[Alt et al., 2007] Alt, Z.; Benko, D.; Drnovšek, I.; Erker, J.; Fric, M.; Hvastja, D.; Jevnikar, M.; Kejžar, B.; Kobal, D.; Kranjc, B.; Lavrič, B.; Legiša, P.; Mohar, B.; Pagon, D.; Pavletič, M.; Pavlič, G.; Pisanski, T.; Robnik, A.; Škof, M.; Urbanija, F. V.; in Žerovnik, J. (2007). *PREDMETNI IZPITNI KATALOG ZA SPLOŠNO MATURO - MATEMATIKA*. Državni izpitni center.

[Aogáin, 2000] Aogáin, E. M. (2000). "Assessment in the CAS age: an Irish perspective". V zborniku *Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy, Portorož, Slovenia.*

[Böhm et al., 2004] Böhm, J.; Forbes, I.; Herweyers, G.; Hugelshofer, R.; in Shomacker, G. (2004). *The Case for CAS.* Westfälische Wilhelms-Universität Münster-Germany.

[Flynn in McCrae, 2001] Flynn, P. in McCrae, B. (2001). "Issues in Assessing the Impact of CAS on Mathematics Examinations". V zborniku *Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA), Sidney, Australia.*

[Herget et al., 2000] Herget, W.; Heugl, H.; Kutzler, B.; in Lehmann, E. (2000). "Indispensable manual calculation skills in a CAS-invironment". V zborniku *Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy, Portorož, Slovenia.*

[Heugl, 2000] Heugl, H. (2000). "New emphasis of fundamental algebraic competence and its influence in exam situation". V zborniku *Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy, Portorož, Slovenia.*

[Jones in McCrae, 1996] Jones, P. in McCrae, B. (1996). "Assessing the impact of graphics calculators on mathematics examinations". V zborniku *Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA), Melbourne, Australia.*

[Kokol-Voljč, 2000a] Kokol-Voljč, V. (2000a). "Examination questions when using CAS for school mathematics teaching". *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(1), str. 63–76.

[Kokol-Voljč, 2000b] Kokol-Voljč, V. (2000b). "New exams with new focuses". V zborniku *Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy, Portorož, Slovenia.*

[Kutzler, 2000] Kutzler, B. (2000). "Two-tier exams as a way to let technology in". V zborniku *Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy, Portorož, Slovenia.*

[Lokar, 2000] Lokar, M. (2000). "Some questions about technology and teaching". V zborniku *Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy, Portorož, Slovenia.*

[Lokar, 2005] Lokar, M. (2005). "Nekaj vprašanj o tehnologiji in poučevanju - Some questions about technology and teaching". V zborniku *10. mednarodna konferenca - MIRK'05, 19. - 21. maj 2005, Osnovna šola Cirila Kosmača, Piran.*

[Lokar in Lokar, 2000] Lokar, M. in Lokar, M. (2000). ”Slovene final external examination - Matura in the view of computer algebra systems”. V zborniku *Proceedings of the 6th ACDCA Summer Academy, Portorož, Slovenia.*

[Lokar in Lokar, 2001] Lokar, M. in Lokar, M. (2001). ”CAS and Slovene final external examination”. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 8(1), str. 23–44.

[Roškar, 2007] Roškar, K. (2007). ”Uporaba programov Mathematica, Derive in Matlab pri reševanju maturitetnih nalog”. Diplomsko delo, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko.

[Wazir, 2007] Wazir, I. (2007). ”An international school perspective”. *CAME 2007, Pécs, Madžarska*, dostopno na `http://www.lkl.ac.uk/came/events/CAME5/CAME5-Theme2-Wazir.pdf`.

Kratka predstavitev avtorjev

Matija Lokar je zaposlen na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani kot vodja računalniškega centra in kot višji predavatelj. Je avtor več knjig in člankov s področja računalništva in uvajanja računalniške tehnologije v pouk.

Katarina Roškar je diplomantka praktične matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.